2011-2012 **Préparation à l'agrégation externe**
Université de Provence **Option B**

Stage de rentrée : TP 1

Exercice 1. Construire les matrices suivantes le plus rapidement possible (c'est à dire en utilisant le moins de lignes de commande possible). S'il y a lieu, donner leur transposée, leur rang et leur déterminant.

a) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1,3 \end{pmatrix}$.

b) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ puis la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Le vecteur colonne nul de longueur 4.

d) La matrice à 3 lignes et 2 colonnes dont tous les coefficients sont 1.

e) La matrice identité de taille 4.

f) La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

g) Les vecteurs $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}$ et $c = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

h) La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \\ -2 & -3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

i) Les matrices $D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ et $d = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$.

j) La matrice compagnon B de taille 4, définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

k) La matrice de Hilbert F de taille 7, dont le terme général est $F_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$.

l) La matrice carrée de taille 5 dont tous les éléments sont choisis aléatoirement dans [2,5] avec la loi uniforme. *Commande Scilab :* `rand`.

Exercice 2. La discrétisation de certaines équations aux dérivées partielles se ramène à résoudre un système linéaire du type $Ax = b$ où A est une matrice carrée tridiagonale, de diagonale égale à 2 et de sur et sous diagonales égales à -1. La taille de la matrice A que l'on notera N peut être très grande. On s'intéresse au temps de calcul pour résoudre ce système pour différentes valeurs de N. On commencera par prendre $N = 10$.

1. Construire le vecteur $b = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ de longueur N.

2. Matrice pleine : Construire A comme une matrice pleine. *Commande Scilab* `diag`.
   Puis résoudre le système $AX = b$ en mesurant le temps nécessaire. *Commande Scilab :* `\`, `tic` et `toc`.
3. Matrice creuse : Construire A comme une matrice creuse. *Commande Scilab* `sparse` et `diag`.
   Puis résoudre le système $AX = b$ en mesurant le temps nécessaire. *Commande Scilab :* `\`, `tic` et `toc`.
   Comparer les temps de calcul.
4. Reprendre les questions précédentes avec $N = 1000$

Exercice 3. Les couples de lapins, comme tout le monde sait, se reproduisent rapidement. Leonardo Fibonacci de Pise au XIIIème siècle, pose le problème suivant : « Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? ». Ceci se traduit mathématiquement par la suite définie par la récurrence suivante (vérifiez que vous auriez pu trouver tout seul l'expression de la suite) :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \\ u_0 = 0, u_1 = 1 \end{array} \right.$$

1. Ecrire une fonction d'argument n qui calcule le nombre de couples de lapins au mois n, sans stocker en mémoire toutes les valeurs de la suite. Calculer le nombre de couples au bout d'un an, dix ans, 500 ans.
2. Posons
   $$V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$
   On rappelle que $V_{n+1} = AV_n$ avec
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Ecrire une nouvelle fonction qui calcule u_n avec cette méthode. Calculer u_{12}, u_{120}, u_{6000}.
3. Comparer les deux méthodes.
4. La suite u_n possède la propriété que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers le nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Illustrer numériquement la convergence.

Exercice 4. 1. Tracer le polygone passant par les points : $A_1 = [0, 0]$, $A_2 = [0.2, 0.5]$, $A_3 = [0.4, 0.8]$, $A_4 = [0.7, 0.9]$, $A_5 = [1, 1]$, $A_6 = [0.8, 0.6]$, $A_7 = [0.5, 0.1]$.

2. Tracer un polygone régulier à 5 côtés.
3. Tracer un polygone régulier à 17 côtés.

Exercice 5. On rappelle que les équations du mouvement d'un point fixe $M(t)$ sur une roue de rayon a qui roule sans glisser sont données par :

$$M(t) = \left\{ \begin{array}{l} x_M(t) = a(t - \sin t) \\ y_M(t) = a(1 - \cos t) \end{array} \right. \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}.$$

1. Tracer cette courbe.
2. Visualiser le mouvement de ce point, du centre de la roue et la roue elle-même à l'aide d'une animation.
   [On rappelle que les équations du mouvement du centre de la roue sont données par $C(t) = \left\{ \begin{array}{l} x_C(t) = at \\ y_C(t) = a \end{array} \right.$ pour $t \in \mathbb{R}$.]