Stage de rentrée : TP 2

Exercice 1 (Erreur d'approximation)**.**

1. Que donne $1+2^{-53}$? Expliquer. Tester si $(2^{-53}+2^{-53})+1 = 2^{-53}+(2^{-53}+1)$. Visualiser un nombre de chiffres significatifs assez important pour observer la différence.
   Commandes Scilab éventuellement utiles : `==, format`.
   Règle d'or : Quand on travaille en arithmétique flottante, se méfier des tests d'égalité. Proscrire le test `variable == 0` et lui préférer `abs(variable) < eps`, avec `eps` petit.
2. Comparer les formules $f_1(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ et $f_2(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ pour x grand (prendre $x = 2^i \cdot 10^{14},\ i = 0, ..., 9$).
3. Soit le polynôme $P(x) = (1-x)^6 = 1-6x+15x^2-20x^3+15x^4-6x^5+x^6$. Tracer la courbe représentative de ce polynôme dans l'intervalle [0.995,1.005] en utilisant respectivement les deux expressions algébriquement équivalentes de P.

Exercice 2. Soit $a > 0$ et $f(x) = ax(1-x)$. On s'intéresse au point fixe $s = \max(0, \frac{a-1}{a})$. On se donne u_0 et on définit la suite (u_n) par $u_{n+1} = f(u_n)$. On note l'erreur absolue $e_n = |u_n - s|$.

1. Vérifier sur feuille que s est bien point fixe de f et que $|f'(s)| < 1$ pour $a < 3$ et $a \neq 1$. Faire un dessin.
2. Pour $a = 1.5$ et $u_0 = 0.9$, calculer <u>sans stocker les itérés de la suite</u> le premier u_n avec $n \leq 30$ tel que $|u_n - u_{n-1}| \leq 10^{-6}$.
   Indication : On introduira une variable `uold` différente initialement de u_0 pour mettre en place le test d'arrêt.
3. Toujours pour $a = 1.5$ et $u_0 = 0.9$,
   – écrire un algorithme qui calcule puis stocke les au plus 30 premiers itérés de la suite u_n tant que $|u_n - u_{n-1}| > 10^{-6}$,
   – tracer le graphe de u_n en fonction de n, c'est à dire la ligne brisée qui joint les points $(0, u_0)$, $(1, u_1)$, ...,
   – sur une autre figure, tracer en même temps, le graphe de la fonction f, la droite $y = x$ ainsi que la ligne brisée qui joint les points (u_0, u_0), $(u_0, f(u_0))$, (u_1, u_1), $(u_1, f(u_1))$, ...,
   – sur une autre figure, tracer en échelle logarithmique le nuage de point (e_{n-1}, e_n) pour $n \geq 3$, où $e_n = |u_{n-1} - u_n|$. Déterminer la pente de la droite de régression linéaire pour ce nuage de point et tracer cette droite sur la même figure. En déduire la vitesse de convergence de cet algorithme.
   Commandes Scilab éventuellement utiles : `subplot, reglin, plot` ou `plot2d` avec l'option `logflag`.
4. Reprendre la question précédente avec $a = 0.8$, 2.0, 2.9.
5. Pour $a = 3.2$ puis $a = 3.99$,

- calculer puis stocker les 30 premiers itérés u_n,
- tracer le graphe de u_n en fonction de n
- sur une autre figure, tracer en même temps, le graphe de la fonction f, la droite $y = x$ ainsi que la ligne brisée qui joint les points (u_0, u_0), $(u_0, f(u_0))$, (u_1, u_1), $(u_1, f(u_1)), \ldots$. Qu'observe-t-on ?

Exercice 3. On considère la fonction $f(x) = x - \sin(x) - \frac{3\pi}{2}$. On note s son unique zéro. On pose enfin $g(x) = \sin(x) + \frac{3\pi}{2}$.

1. Obtenir une valeur approchée de s à l'aide de la commande `fzero` en Matlab et `fsolve` en Scilab. Tracer sur une même figure le graphe de f sur l'intervalle $[0, 10]$, l'axe des x et un marqueur en $(s, 0)$.
   Commande Matlab utile : `inline`
   Commande Scilab utile : `deff`
2. Ecrire un algorithme déterminant une approximation de s par la **méthode de dichotomie**. On initialisera avec $x_1 = -10$ et $x_2 = 5$ et on arrêtera le processus lorsque la taille de l'intervalle entre x_1 et x_2 sera plus petite que 10^{-6}. On stockera l'erreur absolue (mais pas les itérés), c'est à dire la différence avec la solution "exacte" obtenue à la question précédente $|s - x_n|$ et on tracera en échelle semilogarithmique cette erreur.
3. Pour les méthodes suivantes, calculer les suites jusqu'au premier n pour lequel on a $|x_n - x_{n-1}| \leq 10^-6$ et stocker l'erreur absolue.
   a) **Méthode des approximations successives** définie par la suite
   $$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = g(x_n) \quad n \geq 1. \end{cases}$$
   b) **Méthode de la sécante** définie par la suite $\begin{cases} x_1 = -10; \quad x_2 = 5; \\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \quad n \geq 2. \end{cases}$
   c) **Méthode de Newton** définie par la suite $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n \geq 1. \end{cases}$
4. On souhaite comparer les vitesses de convergence de ces différentes méthodes. Tracer sur une même figure e_n en fonction de n pour les différentes méthodes. Tracer ensuite en échelle logarithmique pour chaque méthode sur une figure différente, le nuage de points (e_{n-1}, e_n) pour n de 1 jusqu'au dernier itéré (avant dernier itéré pour la méthode de Newton) et déterminer une approximation numérique de l'ordre de convergence en calculant le coefficient directeur de la droite de régression linéaire (aussi appelée droite des moindres carrés) pour ce nuage de points.
5. Pour la méthode des approximations successives, tracer sur une même figure la courbe représentative de g, la droite $y = x$ et la ligne brisée reliant (x_1, x_1), $(x_1, g(x_1))$, (x_2, x_2), $\ldots$
6. Pour la méthode de Newton, tracer sur une même figure le graphe de la fonction f, l'axe des x et la ligne brisée reliant $(x_1, 0)$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, 0)$, $(x_2, f(x_2))$, $\ldots$