
TP 3 Systèmes linéaires

Références conseillées : Allaire - Kaber "Algèbre linéaire numérique", Ciarlet

L'approximation par une méthode de différences finies de la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in]a, b[\\ u(a) = 0, & u(b) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

consiste à se donner n entier, à poser $h = \frac{b-a}{n+1}$ et $x_i = a + ih$ pour $i = 1 \dots n$ et à calculer une valeur approchée de la solution aux points x_i notée u_i . En utilisant des formules de Taylor, l'équation (1) peut être approchée par le système

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f(x_i), \quad i = 1 \dots n.$$

On pose ensuite $u_0 = u(a)$ et $u_{n+1} = u(b)$. Ceci se réécrit sous forme matricielle

$$Au = b \quad (2)$$

avec

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad b = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

On s'intéresse dans ce TP aux méthodes de résolution d'un système linéaire du type (2), en prenant comme exemple particulier la matrice ci-dessus et $f(x) = 1$.

Exercice 1. Les méthodes de résolutions directes des systèmes linéaires : Gauss, LU, Choleski.

1. Définir un algorithme simple pour calculer les mineurs principaux d'une matrice de taille $n \times n$.
2. On prend $n=10$. Que peut-on dire des mineurs principaux de A ? Qu'est-ce que cela implique sur la matrice A ?
3. Déterminer une décomposition LU de A (commande `lu`). Que remarquez vous?
4. Résoudre le système (2) en utilisant la factorisation et l'opérateur `\` pour inverser les systèmes triangulaires. Tracer la solution obtenue et comparer avec la solution exacte de l'équation (1).
5. Déterminer la décomposition de Choleski de A (commande `chol`). On rappelle que pour toute matrice symétrique définie positive A , il existe une unique matrice triangulaire inférieure de coefficients diagonaux positifs telle que $A = CC^t$.

Exercice 2. Conditionnement d'une matrice.

On munit \mathbb{R}^n d'une norme, notée $\|\cdot\|$, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme induite, notée aussi $\|\cdot\|$. Pour une matrice inversible $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ le conditionnement de la matrice A .

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Soient B et δB deux vecteurs de \mathbb{R}^n avec B non nul. Soient X et δX les solutions des systèmes $AX = B$ et $A(X + \delta X) = B + \delta B$. Montrer (sur feuille) que

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \frac{\|\delta B\|}{\|B\|} \leq \frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta B\|}{\|B\|}.$$

2. Montrer (sur feuille) que $\text{cond}(A) \geq 1$ pour toute matrice A .
3. Déterminer le conditionnement associé à la norme euclidienne de la matrice A (commande `cond`). Que remarquez vous ?
4. Que se passe-t-il lorsque vous perturbez b dans la résolution de (2) ?

Exercice 3. Les méthodes itératives de Jacobi et Gauss-Seidel. Pour cet exercice, on prend $n = 10$. On cherche la solution X du système (S) , comme limite d'une suite définie par récurrence. L'idée est d'écrire la matrice A difficile à inverser sous la forme $A = M - N$ où M est une matrice beaucoup plus facile à inverser. On a alors

$$Au = b \Leftrightarrow Mu = Nu + b \Leftrightarrow u = M^{-1}Nu + M^{-1}b.$$

La dernière équation est un problème de point fixe, facile à résoudre par itérations en posant

$$Mu^{k+1} = Nu^k + b, \quad u^0 = u_0.$$

On décompose A de la façon suivante : $A = D - E - F$ où D est la diagonale de A , E est triangulaire inférieure, F est triangulaire supérieure.

– **Méthode de Jacobi** : On considère $M = D$ et $N = E + F$.

– **Méthode de Gauss-Seidel** : On considère $M = D - E$ et $N = F$.

1. Décomposer la matrice A sous la forme $D - E - F$ (commandes `diag(diag)`, `triu`, `tril`).
2. Programmer la méthode de Jacobi, en utilisant l'opérateur `\` pour inverser M . On initialisera avec un vecteur u_0 aléatoire et on prendra pour test d'arrêt $\|r^k\| < \varepsilon \|b\|$ où le résidu est défini par $r^k = \|b - Au^k\|$ et $\varepsilon = 10^{-2}$. Tracer en échelle semi-logarithmique le résidu en fonction des itérations. Quelle est la pente de la droite obtenue ? Commenter.
3. Idem pour Gauss-Seidel.
4. Pour $n = 4$, déterminer les rayons spectraux de $B_J = D^{-1}(E + F)$ et $B_G = (D - E)^{-1}F$ (commandes `spec`). Quelle remarque pouvez vous faire sur la convergence ? Comparer avec le nombre d'itérations nécessaire pour satisfaire le critère d'arrêt des deux méthodes.

Exercice 4. Les méthodes de type gradient.

1. Sur feuille, montrer que résoudre le système $AX = b$ est équivalent à trouver un minimum de la fonctionnelle $J(X) = \frac{1}{2} \langle AX, X \rangle - \langle b, X \rangle$, lorsque A est une matrice symétrique définie positive. Donner le gradient de J en tout point de \mathbb{R}^n .

2. Pour résoudre le système $AX = b$, on choisit de minimiser la fonctionnelle J associée en utilisant une méthode de gradient à pas constant. On construit donc la suite u^k avec $u^0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque puis $u^{k+1} = u^k - \rho(Au^k - b)$ où $\rho \in \mathbb{R}^+$ est une constante. On rappelle que la méthode de gradient à pas constant converge pour $0 < \rho < \frac{2}{\lambda_n}$ où $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ sont les valeurs propres de A . Programmer cette méthode. On stoppera les itérations dès que $\|b - Au^k\| \leq \varepsilon\|b\|$, avec $\varepsilon = 10^{-2}$. Illustrer la non-convergence de l'algorithme pour une valeur bien choisie de ρ .
3. De même, programmer la méthode de gradient à pas optimal définie par

$$u^{k+1} = u^k - \rho_k(Au^k - b), \text{ où } \rho_k = \frac{\|r^k\|^2}{(r^k, Ar^k)}, \text{ avec } r^k = Au^k - b.$$

Comparer les nombre d'itérations nécessaires pour satisfaire le critère d'arrêt.

4. L'algorithme du gradient conjugué s'écrit :
- u^0 étant donné, on calcule $r^0 = b - Au^0$, $p^0 = r^0$
 - Pour $k = 1, 2, \dots$, on calcule
 - $\rho^k = \frac{\langle r^{k-1}, r^{k-1} \rangle}{\langle Ap^{k-1}, p^{k-1} \rangle}$
 - $u^k = u^{k-1} + \rho^k p^{k-1}$ et $r^k = r^{k-1} - \rho^k Ap^{k-1}$
 - Si $\|r^k\| < \varepsilon\|b\|$ alors stop
 - $\beta^k = \frac{\langle r^k, r^k \rangle}{\langle r^{k-1}, r^{k-1} \rangle}$ et $p^k = r^k + \beta^k p^{k-1}$

Programmer cet algorithme. On observera que par itération seuls deux produits scalaires, un calcul de norme et un produit matrice vecteur sont nécessaires. De plus, on stockera d'une itération sur l'autre les produits scalaires plutôt que les vecteurs. Enfin en dehors de b et u on n'utilisera que trois vecteurs de taille n : les vecteurs r , p et q qui contient Ap . Comparer le nombres d'itérations avec les autres méthodes.